ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TÔ THỊ LAN

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH TOÁN VÀ ƯỚC LƯỢNG LỰC LƯỢNG CỦA CÁC TẬP HỮU HẠN SINH BỞI HÀM SỐ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TÔ THỊ LAN

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH TOÁN VÀ ƯỚC LƯỢNG LỰC LƯỢNG CỦA CÁC TẬP HỮU HẠN SINH BỞI HÀM SỐ

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: **GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu**

THÁI NGUYÊN - 2019

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu (Trường ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐHQGHN), thầy đã trực tiếp hướng dẫn tận tình và động viên tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu vừa qua.

Xin chân thành cảm ơn tới các quý thầy, cô giáo đã trực tiếp giảng dạy lớp cao học Toán K11, các bạn học viên, và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, động viên giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu tại trường. Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình và người thân luôn khuyến khích động viên tác giả trong suốt quá trình học cao học và viết luận văn này.

Mặc dù có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp của các thầy cô và các bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2019

Tác giả

Tô Thị Lan

Mục lục

Mở đầu

Toán học tổ hợp được nghiên cứu từ khá sớm. Hiện nay trong giáo dục phổ thông, toán học tổ hợp là một trong những nội dung quan trọng, thường xuyên xuất hiện trong các đề thi THPT Quốc Gia và đề thi chọn học sinh giỏi các cấp. Trong các bài toán tổ hợp có một lớp các bài toán đếm. Bài toán đếm rất phong phú kể cả dạng phát biểu đến cách giải. Độ khó của bài toán đếm được trải rất rộng - từ những bài toán dễ với các số liệu cụ thể, có thể kiểm chứng bằng trực giác đến những bài toán khó hơn, với những dữ liệu đầu vào bằng chữ mà kết quả của nó được biểu diễn bằng một công thức toán học. Có những công thức được tìm ra qua một vài suy luận đơn giản nhưng cũng có những công thức mà việc tìm thấy chúng phải kéo dài rất lâu. Bài toán đếm giúp học sinh phát huy tốt khả năng tư duy sáng tạo. Nhằm đáp ứng nhu cầu bồi dưỡng học sinh giỏi và phát triển tư duy cho học sinh tôi chọn đề tài "Một số phương pháp tính toán và ước lượng lực lượng của các tập hữu hạn sinh bởi hàm số ". Luận văn tổng hợp một số dạng bài tập đặc trưng góp phần nâng cao tư duy tổ hợp của học sinh cũng như giúp học sinh lựa chọn kiến thức trong quá trình giải một bài toán tổ hợp. Cấu trúc luận văn gồm 3 chương.

Chương 1. Một số tính chất của tập hợp hữu hạn.

Chương 2. Đẳng thức, bất đẳng thức và một số bài toán cực trị tổ hợp.

Chương 3. Một số phương pháp xác định lực lượng của tập hữu hạn.

Chương 1. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA TẬP HỢP HỮU HẠN

Trong chương này, tác giả nhắc lại các khái niệm cơ bản liên quan đến tập hợp, các phép toán cơ bản của tập hợp, các công thức liên quan đến hoán vị chỉnh hợp và tổ hợp, công thức tính lực lượng của tập hợp và một số nguyên lý đếm nâng cao nhằm chuẩn bị cơ sở cho việc giải các bài toán trong chương 2 và chương 3.

Các kết quả trong chương 1 được trích dẫn từ tài liệu tham khảo [3].

1.1 Một số khái niệm cơ bản liên quan đến tập hợp

Định nghĩa 1.1. *Tập B được gọi là tập con của tập A nếu mỗi phần tử của nó đều thuộc tập A. Ký hiệu $B \subseteq A$.*

Định nghĩa 1.2. *Khi B là tập con của tập A và $B \neq A$, thì B được gọi là tập con thực sự của tập A. Ký hiệu $B \subset A$.*

Định nghĩa 1.3. *Tập hợp không chứa một phần tử nào được gọi là tập hợp rỗng. Ký hiệu là $\varnothing$.*

Định nghĩa 1.4. *Cho tập A, số phần tử trong tập A được gọi là lực lượng của tập A, ký hiệu là $|A|$.*

Định nghĩa 1.5. *Cho các tập hợp A, B, tập gồm các phần tử hoặc thuộc tập A hoặc thuộc tập B được gọi là hợp của tập A và tập B. Ký hiệu là $A \cup B$ hoặc $A \vee B$.*

Định nghĩa 1.6. *Cho các tập hợp A, B, tập hợp gồm các phần tử thuộc đồng thời cả tập A và tập B được gọi là giao của tập A và tập B. Kí hiệu là $A \cap B$ hoặc $A \wedge B$.*

Định nghĩa 1.7. *Tập hợp gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B được gọi là hiệu của tập A và tập B. Ký hiệu là* $A \backslash B$.

Định nghĩa 1.8. *Giả sử tập B là tập con của tập A, tập gồm tất cả các phần tử thuộc A, nhưng không thuộc B được gọi là phần bù của tập B trong tập A và ký hiệu là* $C_A(B)$.

1.1.1 Công thức tính lực lượng của tập hợp

- Cho hai tập A, B ta có $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
- Cho ba tập A, B, C ta có

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

- Tổng quát. Cho $A_1, A_2, \ldots A_m$ là các tập hữu hạn ta đặt

$$\begin{aligned}
N_1 &= \sum_{i=1}^{m} |A_1| \\
N_2 &= \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_i| \\
N_3 &= \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k}| \\
&\ldots \\
N_m &= |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|
\end{aligned}$$

Khi đó ta có

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} N_i. \tag{1.1}$$

Chứng minh. Với mỗi $a \in \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$, ta chứng minh a được đếm số lần như nhau ở cả hai vế của công thức (1.1)
Vì a thuộc ít nhất một trong các tập $A_1, A_2, \ldots A_m$, không mất tính tổng quát, giả sử a thuộc đúng k tập $A_1, A_2, \ldots A_k$ trong các tập đã cho. Ta thấy trong vế trái của (1.1), a được đếm một lần. Theo vế phải của (1.1), a cũng được đếm C_k^1 lần trong $\sum\limits_{i=1}^{m} |A_i|$, C_k^2 lần trong $\sum\limits_{1 \le < i < j \le m} |A_i \cap A_i|, \ldots$ Do đó ở vế phải của công thức (1.1) a được đếm số lần là

$$\mathrm{C}_k^1 - \mathrm{C}_k^2 + \mathrm{C}_k^3 - \cdots + (-1)^{k-1}\mathrm{C}_k^k = \mathrm{C}_0^k - \left(\mathrm{C}_0^k - \mathrm{C}_k^1 + \mathrm{C}_k^2 - \mathrm{C}_k^3 - \cdots + (-1)^k \mathrm{C}_k^k\right)$$

$$= 1 - (1-1)^k = 1.$$

Rõ ràng, với mỗi $a \notin \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, ở cả vế trái và vế phải của (1.1) số lần a được đếm là 0 lần. Như vậy, với mọi phần tử a, số lần a được đếm ở vế trái và vế phải của (1.1) là như nhau. Do đó ta có điều phải chứng minh.

1.1.2 Một số nguyên lý cơ bản của phép đếm

Nguyên lý cộng

Cho $A_1, A_2, \ldots A_m$ là các tập hữu hạn từng đôi một rời nhau. Khi đó ta có

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = \sum_{i=1}^{m} |A_i|.$$

Nguyên lý nhân

Nếu $A_1, A_2, \ldots A_m$ là các tập hữu hạn thì

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m| = |A_1||A_2| \ldots |A_m|.$$

Nguyên lý trừ

Nếu Y là một tập con của một tập hữu hạn X thì $|X \setminus Y| = |X| - |Y|$.

Nguyên lý bù trừ (công thức Sieve) Giả sử $A_1, A_2, \ldots A_m$ là các tập con của một tập hữu hạn X, kí hiệu $\overline{A_i}$ là phần bù của A_i trong X, $(i = 1; 2; \ldots m)$ thì

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \ldots \cap \overline{A_m}| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m}|$$
$$= |X| + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \sum_{a \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k}|.$$

Theo nguyên lý bù trừ ta có

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m}| = |X| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = |X| + \sum_{i=1}^{m} (-1)^i N_i.$$

Nguyên lí Dirichlet cơ bản

Nếu nhốt $n+1$ con thỏ vào n cái chuồng thì bao giờ cũng có ít nhất một chuồng chứa ít nhất hai con thỏ, với n là số nguyên dương.

Nguyên lí Dirichlet tổng quát

Nếu có N đồ vật được đặt vào trong k hộp thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ đồ vật. (Ở đây, $\lceil x \rceil$ là giá trị của hàm trần của số thực x, đó là số nguyên nhỏ nhất có giá trị lớn hơn hoặc bằng x. Khái niệm này đối ngẫu với hàm sàn $[x]$ - giá trị của hàm sàn hay hàm phần nguyên tại x - là số nguyên lớn nhất có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng x.)

Nguyên lí Dirichlet mở rộng

Nếu nhốt n con thỏ vào $m \geq 2$ cái chuồng thì tồn tại một chuồng có ít nhất $\left[\frac{n+m-1}{m}\right]$ con thỏ.
Ta chứng minh nguyên lí Dirichlet mở rộng như sau.
Giả sử trái lại, mọi chuồng thỏ có không đến

$$\left[\frac{n+m-1}{m}\right] = \left[\frac{n-1}{m} + 1\right] = \left[\frac{n-1}{m}\right] + 1$$

con thỏ, thì số thỏ trong mỗi chuồng đều nhỏ hơn hoặc bằng $\left[\frac{n-1}{m}\right]$ con. Suy ra tổng số con thỏ không vượt quá

$$m \cdot \left[\frac{n-1}{m}\right] \leq n - 1.$$

Điều này vô lí, vì có n con thỏ. Vậy giả thiết phản chứng là sai.
Nguyên lí Dirichlet mở rộng được chứng minh.

Nguyên lí cực hạn

Nguyên lí cực hạn được phát biểu đơn giản như sau.
Nguyên lí 1: Trong một tập hữu hạn và khác rỗng các số thực luôn luôn có thể chọn được số bé nhất và số lớn nhất.
Nguyên lí 2: Trong một tập khác rỗng hữu hạn các số tự nhiên luôn luôn có thể chọn được số bé nhất.

1.2 Các quy tắc đếm cơ bản

1.2.1 Quy tắc cộng

Nội dung quy tắc. Nếu có m_1 cách chọn đối tượng a_1, m_2 cách chọn đối tượng $a_2, \ldots,$ m_n cách chọn đối tượng a_n, trong đó cách chọn đối tượng a_i $(1 \leq i \leq n)$ không phụ thuộc vào bất kỳ cách chọn đối tượng a_j nào $(1 \leq j \leq n,\ i \neq j)$, thì sẽ có $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k$ cách chọn đối tượng a_1, hoặc $a_2, \ldots,$ hoặc a_n.